वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

लघुपुस्तिका

1.	गणित म्हणजे 'का'?	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
2.	Sin 90 = 1 'का'?	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
3.	त्रिकोणमिती आणि आलेख	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
4.	हत्तीचा उंदीर	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
5.	साक्षर भूमिती	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00

आगामी

* काही पत्रिका आणि काही लघुपत्रिका
* काही कृतिपत्रिका



लघुपुस्तिका क्र. 02



वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

द्वारा : श्री. ना. शं. मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई-412 803.

दूरध्वनी : (02167) 220766, Email : nagesh.mone@gmail.com

Sin 90 = 1 'का'?

प्रा. मनोहर रामचंद्र राईलकर

वाई तालुका गणित अध्यापक, मंडळ

वाई

अक्षरजुळणी
प्रा. मनोहर राईलकर पुणे

संपादक
नागेश शंकर मोने

संपादन साह्य
श्री. अरुण सावंत
श्री. भगवान भुजबळ
सौ. अनुराधा जोशी

प्रकाशक
श्री. दिनकर वि. फरांदे
अध्यक्ष, वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ
वाई

प्रकाशन वर्ष
16 जानेवारी 2011

लेखक
प्रा. मनोहर राईलकर
56, मृण्मयी जेधेनगर,
बिबवेवाडी, पुणे–37
दूरध्वनी: (020) 24420566

मुद्रक
सरस्वती ऑफसेट
275 क, मंगळवार पेठ, सातारा.
दूरध्वनी : (02162) 284430

मूल्य रुपये – 20/-

sin90 = 1 का?

(ह्या लेखाचं शीर्षक म्हणजे मुळात विद्यार्थ्यांचीच शंका आहे. पण, तीच शंका काही शिक्षकांनीसुद्धा विचारल्यानं त्यावर स्वतंत्र पुस्तिकाच लिहावी, असा विचार केला. तुमच्यापैकी अनेकांच्या मनातही ही शंका उद्भवलीच असेलच ना? पात्रांच्या नावांची लघुरूपं योजली आहेत. कारण, नावं महत्त्वाची नाहीत. आणि शि म्हणजे शिक्षक.)

शि — सर, येऊ का?

प्रा — वा:! येऊ का म्हणजे काय? या ना. बरोबर हे सैन्य कुठलं?

शि — अहो आमच्या शाळेतली मुलं आहेत सगळी. त्यांना एक शंका आहे. आणि मला काही तिचं निरसन करता आलं नाही. म्हणून तुमच्याकडे आणलंय. बरं का रे मुलांनो, अगदी बिनधास्त शंका विचारा सरांना. मात्र, पहिल्या वेळी आधी स्वतःचं नाव सांगा.

प्रा — बोला, काय शंका आहे? आणि तुमचे सर म्हणाले त्याप्रमाणं अगदी न घाबरता शंका विचारा.

सा — माझं नाव साधना. शंका अशी. आमच्या दुसऱ्या एका सरांनी त्रिकोणमिती वापरून त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाकरता एक सूत्र शिकवलं. ते असं, 1/2(bcsinA) असं. आणि ते म्हणाले, हेच सूत्र काटकोन त्रिकोणाकरताही चालतं. फक्त, sin 90 = 1 घ्यायचं इतकंच म्हटलं. पण त्याचं कारण सांगितलं नाही त्यांनी.

शे — मी शेखर. पण सर उत्तर मात्र बरोबर येतं. पण मग ते म्हणतात तसं sin 90 = 1 असं म्हणणं बरोबर आहे का?

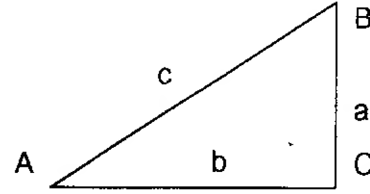
सा — त्रिकोणमितीची गुणोत्तरं तर फक्त लघुकोनांकरताच शिकवली आहेत आम्हाला.

शे — थांब ग साधना, सर मी आधी आकृती काढतो.

प्रा — आकृती तर हवीच. त्याशिवाय समजूत चांगली कशी होईल?

शे — ABC असा त्रिकोण घेतला. C = 90. मग प्रथम sinA = a/c अशी व्याख्या आम्हाला शिकवली. म्हणजे समोरील बाजू भागिले कर्ण. पण मला इथं एक समजत नाही, C = 90 घेतल्यानंतर पुन्हा A = 90, कसा असू शकेल? एकाच त्रिकोणात दोन काटकोन

असूच शकत नाहीत.

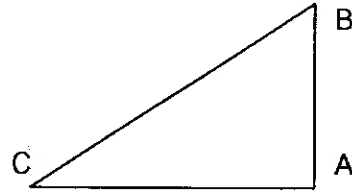


प्रा अगदी बरोबर. एका त्रिकोणात दोन काटकोन असूच शकत नाहीत, हा तुमचा आक्षेप अगदी बरोबर आहे. मला मान्य आहे.

श मी शशिकांत. पण सर आपण क्षेत्रफळाची जर 1/2(bcsinA) ही व्याख्या घेतली. आणि निराळी आकृती काढली तर...

प्रा बोल ना. आकृतीच काढ.

रे मी रेखा. मी काढू का? (प्रा. मानेनं होकार देतात.)



A = 90 घेतलं. मग sin 90 = 1 मानलं की उत्तर बरोबर मिळतं. कारण, AB, AC ला लंब असल्यामुळं उत्तर बरोबर येतं. हे मला मान्य आहे. पण सूत्र कसं वापरता येईल ते मात्र, कळत नाही. कारण एकदा C = 90 घेतल्यावर...

प्रा हा आक्षेप मगाशी शेखरनं घेतला आहे. पण, तुमची शंका आणि आक्षेप दोन्ही बरोबर आहेत. असं का मानायचं ह्याची दोन स्पष्टीकरणं मी तुम्हाला देईन. आज एक. दुसरं उद्या देईन.

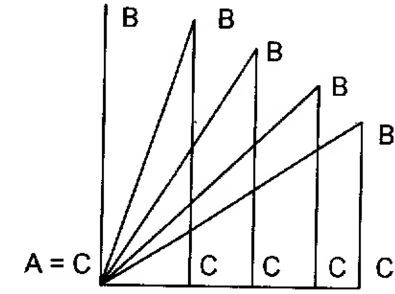
प्र मी प्रबोध. पण, सर हेच सूत्र विशालकोनाकरता वापरता येईल का? मला वाटतं...

सा अरे वेडाबिडा आहेस का तू? काटकोन त्रिकोणाचा कोणताही कोन कधी विशाल असू शकेल का?

प्रा थांब साधना जरा. प्रबोध मुळीच वेडा नाही. त्याची कल्पना कशी बरोबर आहे ते नंतर सांगेन. काटकोन त्रिकोणाचा कोणताच कोन विशाल असणार नाही, हे तुझं म्हणणं बरोबर आहेच. पण प्रबोध म्हणतोय तेही चुकीचं नाही बरं का मुलांनो.

सर्वजण सर! तुम्ही? तुम्ही असं म्हणता?

प्रा जरा धीर धरा की. सगळं काही नीट सांगतो ना समजावून. खरं तर त्याकरता एक प्रयोगच करायला हवा. समजावून सांगायचा प्रयत्न करतो मी. आता मी एक आकृती काढतो ती पहा.

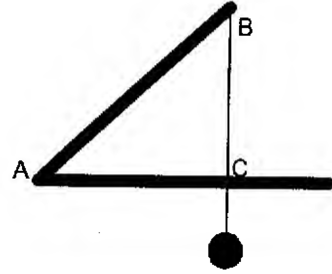


अ मी अदिती. अहो, सर हे काय केलंयत? एकेक अक्षर किती वेळा वापरलं आहेत तुम्ही?

प्रा तुम्ही सगळीच मुलं अधीर कशी? जरा धीर धर. मी एकच अक्षर नाही वापरलं. तर एकाच रेषेच्या विविध अवस्था दाखवल्या आहेत. आणि अक्षरांच्या त्या त्या वेळच्या विविध जागा दाखवल्या आहेत. खरं तर, हे सारं नीट चांगलं समजावून सांगण्याकरता मला एक साधन सुचतंय. त्याचंच चित्र पुढच्या आकृतीत दाखवलंय. AB आणि AC अशा दोन पट्ट्या घ्यायच्या आणि त्या A पाशी फिरू शकतील अशा रीतीनं एकमेकींना स्क्रूनं अडकवायच्या. B पाशी एक खिळा मारून त्याला एक लंबक अडकवायचा. मग तुम्ही AC ही पट्टी आडवी ठेवून A भोवती AB जसजशी फिरवू लागाल, तसतशी वेगवेगळ्या स्थितीत ती पहिल्या आकृतीप्रमाणं दिसू लागेल की नाही?

मं मी मंदार. आता आलं माझ्या लक्षात. म्हणजे तुम्ही A कोन

हळूहळू वाढवीत नेणार.



प्रा शाब्बास मंदार! अगदी बरोबर. तुम्हाला सगळ्यांना कळलं ना मंदारचं म्हणणं? आता सांगा जसजशी AB ही पट्टी उभ्या रेषेकडे येऊ लागेल, किंवा उभी होऊ लागेल म्हणा, तसतसा A कोन किती होऊ लागेल?

सा 90 अंशाचा होईल असं म्हणायचंय का तुम्हाला?

प्रा शाबास साधना. तुम्हा सर्वांच्या लक्षात आलं का? खरं तर असं साधं उपकरण तुम्ही स्वतः केलंत आणि वापरलंत, तर तुम्हाला चांगलं कळेल. आता आणखी एक प्रश्न. sin A = CB/AB = समोरील बाजू भागिले कर्ण, असं मगाशी शेखरनं म्हटलंच होतं नाही का? मग पट्टी जसजशी उभी होऊ लागेल, तसतशी CB ची लांबीसुद्धा AB इतकी होऊ लागेल की नाही? आणि C=A होईल की नाही?

मं होय सर. मला तसंच वाटायला लागलंय.

प्रा मग CB/AB ह्या गुणोत्तराचं काय होईल?

सा आलं लक्षात सर. त्याची किंमत 1 च्या जवळ येईल.

प्रा बरोबर. म्हणजेच कोन जसजसा 90 च्या जवळ जवळ येऊ लागेल तसतशी त्याच्या sine ची किंमत 1 च्या जवळ येईल. म्हणूनच गणित्यांनी sin 90 = 1असं ठरवलं. लक्षात आलं का? अर्थात, हे स्पष्टीकरण तुम्हाला पटतंय की नाही, ते मला माहीत नाही.

शे अगदीच पटत नाही, असं नाही. पण नेमकं समाधान होत नाही.

प्रा (हसतात) असंच पाहिजे. संपूर्ण समाधान होईतो, तुम्ही थांबताच कामा नये. मला आवडली तुमची ही वृत्ती.

रे पण सर, आमचं अगदी चांगलं, म्हणजे पूर्ण समाधान होईल, असं स्पष्टीकरण देताच येणार नाही का?

प्रा असं कसं चालेल? देता यायलाच हवं. नाही तर मग गणितात दोष राहतील ना? तूर्त ते बाजूला ठेवू. sin 90 = 1 अशी व्याख्याच करू. फक्त ही व्याख्या अगदीच कुणाची तरी लहर म्हणून केली नाही, त्यामागं काही तरी सुसूत्र कारण आहे, इतकं तरी तुमच्या लक्षात आलंय ना?

मुलं होय सर. पण...

प्रा तुमचं पूर्ण समाधान करण्याची जबाबदारी माझी. मग तर झालं? पण, पुढच्या वेळी.

ooo

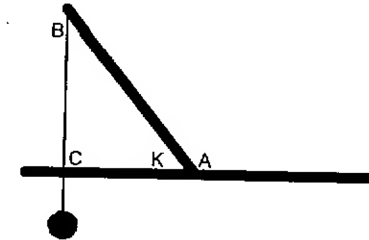
प्रा. आता कालच्या ह्या उपकरणाच्या मदतीनं आपण विशालकोनाचासुद्धा विचार करायचाय ना?

मं म्हणजे विशालकोनाचाही विचार करता येईल ना? मला तेच वाटतं...

रे जरा थांब रे. ह्या मंदारला धीर नाही मुळीच. पण, सर त्याकरता हे उपकरण नाही चालणार. पट्टी जरा लांब घ्यायला हवी.

प्रा शाबास! पण, सांग पाहू कशी ते.

रे आकृती काढून दाखवते. ही बघा. बरोबर?



प्रा छान! अगदी बरोबर. आता सांगा A च्या शेजारच्या कोनाला

आपण तूर्त K असं नाव दिलं तर त्याचं माप काय असेल?

श 180 - A हो ना?

प्रा अगदी बरोबर. आता सांगा K कोन तर लघु आहे की नाही?

मुलं होय सर. म्हणजे त्याचा sine काढता येईल ना?

प्रा आणि तो किती येईल?

मो मी मोहिनी. मी सांगते सांगू? sin K = CB/AB ना?

प्रा बरोबर. मग ह्यावरून आपण CB = AB.sin K असं लिहू शकतो ना? पण, पाया गुणिले उंची भागिले/2 ह्या सूत्रानं ABC ह्या विशालकोन त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ 1/2.AC.CB असतं ना? (सर्व मुलं 'होय सर,' म्हणतात.) मग आता सांगा त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ

$$1/2AC.AB.\sin K = 1/2bc\sin K$$

हेच येतं की नाही?

मो पण सर 1/2(bcsin A) असं कुठं आलं?

प्रा नाही आलं. मान्य. पण मग ते येण्याकरता काय करायला हवं? K म्हणजे काय आहे?

श K = 180 - A असंच ना?

प्रा जर आता सूत्र पहिल्याप्रमाणंच असायला हवं तर त्यासाठी आपण विशालकोनाकरता...

मो sin A = sin (180 - A) अशीच व्याख्या केली तर?

प्रा शाबास! ही तुमची मुलं खरंच हुशार आहेत बरं का सर. अशीच व्याख्या करायची. की मग त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचं आपलं सूत्र, सर्वच प्रकारच्या कोनांकरता चालेल की नाही?

रे नाही सर, माझं नाही समाधान झालं. मला तर ही बनवाबनवी वाटते. आपल्याला सोयीची अशी काहीही व्याख्या केलेली गणितात चालते, असा ह्याचा अर्थ होतो.

शि. अग रेखा, सरांना तू असं काय बोलतेस?

प्रा असू देत. मला नाही राग यायचा. तर **सोयीची** हे तुझं म्हणणं बरोबर. पण **काहीही** आणि **बनवाबनवी** हे म्हणणं चूक. आपली नवी व्याख्या आपल्या जुन्या सर्व व्यवस्थेशी सुसंगत असली पाहिजे.

तशी सोयीस्कर व्याख्या करायला गणितात मुभा असते. ते तुम्हाला मी एका उदाहरणानं पटवून देतो. $a^0 = 1$ असं तुम्ही मानता का नाही? (सर्व मुलं मान डोलवतात.) का? अशीच का करायची? दुसरी कुठली किंमत का घ्यायची नाही? म्हणजे 0 का नाही घ्यायची? सांगता?

मं त्यानं आपलं काम होतं.

प्रा अगदी बरोबर. पण कोणतं काम होतं? खरं तर त्या आधी एक प्रश्न विचारतो. a^n मधील n काय आहे?

मं n नैसर्गिक संख्या आहे का?

प्रा बरोबर. आता a^2, a^3 म्हणजे काय ते सांगा.

श $a^2 = a.a$, $a^3 = a.a.a$. बरोबर?

प्रा बरोबर. a^2 मधे a, 2 वेळा आणि a^3 मधे a, 3 वेळा कारण आणि 2, 3 ह्या नैसर्गिक संख्या आहेत. त्यामुळं **अमुक वेळा**, असं म्हणण्याला अर्थ असतो. पण a^0 करता 0 वेळा असं म्हणता येत नाही. कारण, 0 वेळा a असं म्हणण्याला काहीच अर्थ नाही. तरीही आपण $a^0 = 1$ अशी व्याख्या केली. का? ह्यात काही सोय आहे. की बनवाबनवी केलीय? तुला काय वाटतं मोहिनी?

मुलं आम्हाला माहीत नाही, तुम्हीच सांगा सर.

प्रा घातांकांच्या गुणाकाराचा पहिला नियम काय आहे?

श मी सांगतो. $a^m.a^n = a^{m+n}$ हाच म्हणायचाय ना?

प्रा होय. आता मला $a^3.a^2 = a^{3+2}$ हे उलगडून सांगा.

शे मी सांगतो सर. डावी बाजू =

$a^3a^2 = (a.a.a).(a.a) = a.a.a.a.a$, 5 वेळा $= a^5 = a^{3+2}$, असंच ना?

प्रा अगदी बरोबर. हा नियम घातांक नैसर्गिक संख्या असताना ठीक आहे. कारण आपण अमुक **वेळा**, असं म्हणू शकतो. पण ह्यात एखादा घातांक 0 घेतला तरी चालावं, अशी अपेक्षा करून a^0 चा सोयीस्कर अर्थ लावला तर? म्हणून वरच्या सिद्धतेत 2 ऐवजी 0 घाल. a^0 करता काय मानावं लागतं ते सांग पाहू.

शे $a^3.a^0 = a^3$ आता कळलं मला $a^0 = 1$ असं का मानायचं ते.

प्रा म्हणजे रेखा म्हणते तसं काहीही नव्हे. आणि बनवाबनवीही नव्हे. पण सोयीस्कर असल्यानं तसं ठरवलं आपण. काय सोय झाली? तर $a^0 = 1$ अशी व्याख्या केली तर ती व्याख्या आपल्या घातांकांच्या सार्वत्रिक नियमाशी सुसंगत राहते, हे कळलं का?

मं सर तसं काटकोनाच्या आणि विशाल कोनाच्या sine करताही करता येतं, असं तुम्हाला म्हणायचंय का?

प्रा का नाही म्हणू?

श आम्हाला समजेल?

प्रा अगदी निश्चित. समजणार नाही, असं कधीच समजायचं नाही.

श आम्हाला सांगाल?

प्रा अवश्य. पण, एक लक्षात घ्या. की परिस्थितीनुसार आपल्याला नेहमीच आपल्या व्याख्येत काही बदल, काही दुरुस्त्या किंवा विस्तार करणं भाग पडतं. कोनाकरता तसं करायचं म्हणजे काय करायचं ते आता पुढच्या वेळी पाहू. आज मला थोडं काम आहे. चालेल ना?

ooo

श: सर, तुम्ही विशालकोनाच्या sine करता काय करायचं ते सांगणार ना आज?

प्रा. तर! आता अगदी लहानपणी तुम्ही संख्या शिकलात तेव्हा तुम्हाला कुणी **नैसर्गिक** संख्या हा शब्द वापरून संख्या सांगितल्या होत्या का? किंवा तशा शिकवल्या होत्या का?

मो नाही, सर. वरच्या वर्गात गेल्यावर अपूर्णांक, मग ऋण संख्या आणि आता अपरिमेय संख्या असे नवनवीन अर्थ संख्या ह्या शब्दाला का देतात, तेही आज कळलं.

प्रा लहान मुलाला 3 मधून 5 कसे वजा करता येईल, असा प्रश्न पडतो. कमी वस्तूंमधून जास्त वस्तू कशा काढून घेता येतील? असं त्याला वाटतं. तुम्हाला का नाही पडत तसा प्रश्न?

मो कारण, आम्हाला ऋण संख्या कळल्या आहेत.

प्रा. बरोबर. तसंच कोनाचं आहे. सहासात वर्षांच्या, पहिली दुसरीतल्या

मुलाला कोन म्हणजे काय, असं विचारलं, तर तो भिंतीचा कोपरा, पाटीचा कोपरा, टेबलाचा कोपरा, असं काही तरी दाखवील. म्हणजे काटकोनच ना? कारण, तोवर त्याच्या मनातील कोनाची कल्पना, तिथपर्यंतच विकसित झालेली असेल. पण, तुमची कल्पना त्याच्या थोडीशी पुढं गेली आहे. तरीही अजून ती अजून पूर्ण झालेली नाही. म्हणूनच काटकोनाचा किंवा विशाल-कोनाचा sine कसा काढता येईल, असा प्रश्न तुम्हाला पडला आहे. म्हणूनच मी बनवाबनवी केली असं रेखाला वाटलं.

रे माझं चुकलं सर.

प्रा. तुझं मुळीच चुकलं नाही. गणितात तर नेहमीच अशी संशयी वृत्ती हवी. पटलं नाही तर मान्य करायचंच नाही. अगदी शिक्षकांच्या म्हणण्यावर सुद्धा आक्षेप घेण्यात त्यांचा अपमान होतो असं मला वाटत नाही. समर्थ रामदास स्वामींचं एक काव्य आहे. त्यात ते शिष्याला सांगतात, 'अरे माझी अमर्यादा होईल ह्या भीतीनं तू शंका विचारली नाहीस तर, त्यात तुझंच अनहित आहे. म्हणून माझी मर्यादा न धरता शंका विचार.'

ते असू दे. काटकोनाचा sine असा का हे त्या उपकरणाच्या मदतीनं पाहिलं. पण त्या मार्गानं विशालकोनापर्यंत जाता आलं नाही. निदान तुमचं खरंखुरं पूर्ण समाधान होईल इथपर्यंत जाता आलं नाही. कारण आपण

$$\sin A = \sin (180 - A)$$

का? ह्याचं स्पष्टीकरण मागच्या वेळी दिलं नव्हतं. आज देऊ.

मं त्याकरता काय करायला हवं?

प्रा त्याकरता आता आपल्याला कोनाचीच व्याख्या बदलायला हवी. मात्र, अगदी काटेकोर व्याख्या तुमच्या कक्षेत येणार नाही. म्हणून आपण विज्ञानाचा थोडासा आधार घेऊ.

सु मी सुशांत. सर कोनाची व्याख्या कशी बदलता येईल?

प्रा खरं तर बदलणं हा माझा शब्द योग्य नाही, किंवा उचित नाही. कोनाच्या व्याख्येचा विस्तार असं म्हणू. संख्याकल्पनेचा विस्तार केला की नाही? तसंच. असो. तर, तुम्हाला घर्षण माहीत असेल.

आणि हेही माहीत असेल की, शेतकऱ्याचा पोरगा खांबाला दोरखंडाचं वेटोळं घालतो, आणि त्याच्या मदतीनं माजलेल्या अफाट शक्तीच्या बैलालासुद्धा ओढून धरू शकतो. किंवा एकटा खलाशी काही लक्ष टनांचं जहाज ओढून धरू शकतो. कसं?

रे घर्षणामुळं.

प्रा आता पुढचा प्रश्न. वेढे वाढले तर घर्षण कमी होईल की जास्त?

रे अर्थातच जास्त.

प्रा बरोबर. जास्त वेढे, जास्त घर्षण. जास्त वेढे देण्याकरता मुलाला, खलाशाला खांबाला जास्त प्रदक्षिणा घालाव्या लागतील ना?

मुलं होय सर.

प्रा म्हणजेच जास्त कोनातून फिरावं लागेल की नाही?

मुलं होय सर.

प्रा. म्हणजे तुम्ही कोनाचा काही तरी वेगळा अर्थ लावलात ना?

मुलं होय सर.

प्रा. काय लावलात?

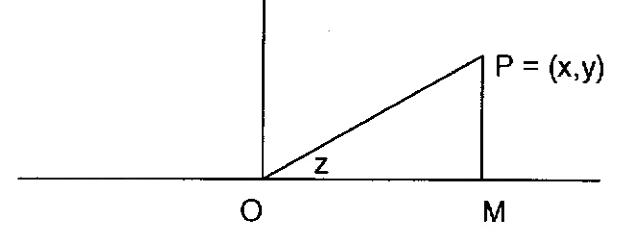
श्या खांबाभोवती आपण किती फिरलो त्यावरून कोन ठरवला.

प्रा. त्याच दृष्टीनं आता आपण कोनाच्या कल्पनेचा विस्तार करू. आणि अशा कोनांकरता त्रिकोणमितीही कशी बदलते, तेही पाहू.

सा म्हणजे आतापर्यंत आपण शिकलेली आपली सगळी त्रिकोणमिती फुकटच का?

प्रा फुकट कशी? तुम्ही ऋण संख्या शिकलात तेव्हा नैसर्गिक संख्यांचं ज्ञान फुकट गेलं का? म्हणून तर तिचा विस्तार करायचा. तेच सांगतोय. मात्र, तिथं एक काळजी घेणं जरूर आहे. कोनाच्या किंवा त्रिकोणमितीच्या कल्पनेचा विस्तार करताना मुळात आपल्याजवळ जे होतं ते फुकट घालवायचंच नाही. नाही तर साधनाला वाटतं तसं आतापर्यंतचं ज्ञान फुकट जाईल. तर, त्यांचा मूलभूत अर्थ तोच राहिला पाहिजे म्हणजे. नव्वद किंवा अधिक मोठ्या कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांकरता त्रिकोणमिती हवी म्हणून कोनाची नवी व्याख्या दिली तरीसुद्धा लघुकोनांच्या गुणोत्तरांचा, त्या नव्या व्याख्येमुळं मिळणारा अर्थ आणि आधीचा अर्थ यांत

फरक नसावा. तरच आपण व्याख्येचा विस्तार केला असं म्हणणं योग्य ठरेल. आणखी स्पष्ट करतो. समजा कोनाची नवीन व्याख्या दिली. आणि त्याचा sine म्हणजे काय तेही ठरवलं. तर नव्या व्याख्येप्रमाणं मिळणारा प्रत्येक लघुकोनाचा sine आणि त्याचाच पूर्वीचा sine म्हणजे समोरील बाजू भागिले कर्ण, यांची उत्तरं सारखी यायला पाहिजेत. तरच कोनाची मूळची कल्पना आणि त्याची गुणोत्तरं ह्यांचा आपण विस्तार केला असं म्हणता येईल. नाही तर मग आधीचं फुकट जाईल. कळलं?



शे ते कसं करता येईल?

प्रा वरच्यासारखी आकृती काढू. तुम्हाला निर्देशक भूमिती माहीत आहे ना? (सगळे होय म्हणतात.) परस्परांस लंब अशा दोन रेषा घेतात. आडव्या रेषेला X-अक्ष म्हणतात, उभ्या रेषेला Y-अक्ष म्हणतात, हे तुम्हाला माहीतच आहे. छेदनबिंदूला आरंभबिंदू (O) म्हणतात. बाकीचं तुम्हाला माहीत असल्यामुळं अधिक चर्चा करीत नाही. आता O मधून जाणारा, समजा r लांबीचा, एक रेषाखंड OP काढला. त्याच्या दुसऱ्या टोकाला P म्हणू. आता मुळात हा रेषाखंड X-अक्षाशी, लांबीचा विचार सोडला तर, OX शी एकरूप होता असं समजू. आणि मग O भोवती तो घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेनं फिरू लागला आहे, असं समजू. तो जसजसा फिरेल तसतसे P चे सहगुणक बदलत जातील. आता मला सांगा रेषाखंड मुळापासून किती फिरला की तो कोन आणि P चे निर्देशक यांच्यात एकास एक संबंध राहील?

स्वा. मी स्वाती. पण सर, त्याची एक फेरी पूर्ण झाली की तो पुन्हा

पहिल्याच जागी येईल आणि पुन्हा पुढं जाईल की. (प्रा. मान डोलवतात.) म्हणजे त्यांच्यांतला संबंध एकास एक कसा राहील?

प्रा. नाहीच राहणार. पण, तूर्त ते आपण बाजूस ठेवू. आणि फक्त एकाच फेरीला परवानगी देऊ. मग झालं? आता सांगा, की रेषाखंड OP कितीपासून कितीपर्यंत कोनातून फिरू शकेल?

सु 0 ते 360 अंशांतून. मग मात्र, एकास एक संबंध राहील.

प्रा P चे निर्देशक (x,y) मानू. आणि कोनाला z नाव देऊ. z कोनाचा sine आणि cosine यांच्या व्याख्या cos z = x/r, आणि sin z = y/r ह्याप्रमाणं ठरवू. कळलं? आता असं पहा की कोन 0 पासून 360 पर्यंतच्या कोणत्याही किमती घेत असला तरी त्याची sine आणि cosine ही गुणोत्तरं मिळतील की नाही?

मुलं होय सर. पण, नव्या व्याख्येप्रमाणं. पण सर काही चरणांत निर्देशक ऋणसुद्धा असतील, त्याचं काय?

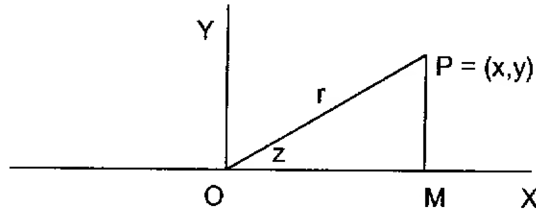
प्रा असू देत. ते नंतर पाहू. पण, जेव्हा P पहिल्या चरणात असेल तेव्हा त्रिकोण OPM ह्या काटकोन त्रिकोणावरून मिळणारी Z ची म्हणजेच POX कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं तशीच, म्हणजे

sin z = y/r = समोरील बाजू/कर्ण आणि

cos z = x/r = शेजारील बाजू/कर्ण

अशी पूर्वीसारखीच मिळतील की नाही? इथं पुन्हा तीच आकृती दाखवतो. म्हणजे कळेल.

मुलं आलं लक्षात. म्हणूनच विस्तार झाला असं म्हणायचं ना?



प्रा होय. आणखी एक मुद्दा. कोन शून्य पासून 360 पर्यंत काहीही असला तरी $x^2 + y^2 = r^2$ हे नित्यसमीकरण सदैव सत्य असल्यामुळं, r^2 नं भागल्यास $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ हे सूत्र आपल्याला **कोणत्याही** कोनाकरता मिळतं.

स्वा पण सर, यावरून विशालकोन त्रिकोणाकरता क्षेत्रफळाचं सूत्र तेच राहतं हे कुठं आपण दाखवलं आहे?

प्रा आता दाखवू ना तेही. खरं तर आपण sin(180 - A) = sinA इतकं दाखवलं तरी चालेल. कारण मागच्या वेळी आपण तशीच व्याख्या केली होती. म्हणून, ती बरोबर कशी, ते दाखवलं तरी पुरेल. त्यापूर्वी तुम्ही आतापर्यंत न विचारलेला एक प्रश्न विचारतो. sin 0=0 हेही पाह्यचं आहे ना? आणि sin 90=1 सुद्धा?

मुलं होय सर.

प्रा पण, तुम्ही कुठं 'का?' असं विचारलंत? (मुलं गप्प) हरकत नाही. आता तुम्हाला कळेल. कोन POX=0 समजा. मग P कुठं असेल?

मुलं x-अक्षावर.

प्रा त्याचे निर्देशक काय असतील?

मुलं x-निर्देशक = r आणि y-निर्देशक = 0, असे असतील. आलं लक्षात. म्हणून आता sin 0 = y/r = 0. आणि cos 0 = 1. आलं सारं लक्षात.

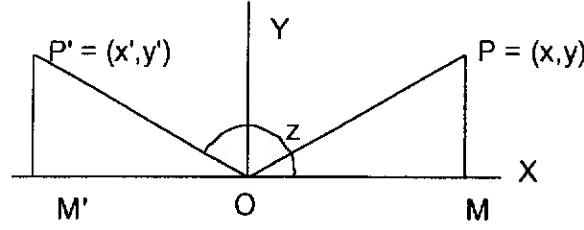
प्रा तसंच sin 90 आणि cos 90 चंही सांगता येईल. त्यावेळचे P चे निर्देशक सांगा.

सा x = 0 आणि y = r आलं लक्षात. sin 90 = r/r = 1. आणि cos 90 = 0 हे स्पष्टीकरण अगदी समाधानकारक आहे. आज मला इतका आनंद झालाय. अगदी छानपैकी कळलं.

प्रा (हसतात.) आणखी एक आपण दोन पट्ट्यांचं साधन केलं होतं ना? त्याच्या मदतीनंसुद्धा हे पाहता येईल. करून पहा. आता, विशालकोन त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ, म्हणजे आधीचं सूत्र काढू.

स्वा मी आकृती काढते.

प्रा थांब जरा. मी थोडीशी वेगळी आकृती काढणार आहे ती पहा. POM = P'OM' घेऊ. मग सांगा POM, आणि विशालकोन P'OM (M' नाही) हे पूरक कोन आहेत की नाही?



स्वा होय सर. कारण, P'OM, P'OM' पूरक आहेत. शिवाय आपण POM = P'OM' असं घेतलंच आहे.

प्रा जर P'OM = z मानलं तर P'OM' किती?

मं 180 - z.

रे सर, माझ्या मनात एक कल्पना आहे. पण मला ते सिद्ध करता यायचं नाही. (पुढं बोल अशी खूण प्रा. करतात.) आपल्या नव्या व्याख्येप्रमाणं एखादा कोन आणि त्याचा पूरक कोन यांचं sine गुणोत्तर समानच येईल नाही का?

मं ए येडबंबू...

प्रा थांब रे. अग मुली, आपल्याला तर तेच हवंय ना? P, P' ह्या दोन बिंदूंच्या निर्देशकांत काय संबंध आहे, ते सांगू शकाल का?

स्वा मी सांगते सर. x' = - x, पण y' = y

प्रा मग...

रे आता आलं लक्षात y' = y असल्यामुळंच दोघांची sine गुणोत्तरं सारखी येतात.

प्रा शाबास रेखा! अगदी बरोबर ओळखलंस. पण रेखा, आपण **काहीही** व्याख्या केली नाही, किंवा **बनवाबनवीही** केली नाही, हे कळलं का? मुलांनो, गणितात बनवाबनवी कधी टिकणारच नाही. रेखासारखा कुणीतरी चतुर गणिती, बिंग फोडील ना त्याचं?

रे काहीतरीच काय सर? पण, P, P' यांचे y-निर्देशक सारखे आहेत म्हणून तसं येतं ना?

प्रा बरोबर. आणखी एक. आपल्या नव्या व्याख्येनुसार त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं नेहमी धनच असतील असं नव्हे. मगाशी तुम्ही कुणीतरी

म्हटलंच. त्यामुळं फक्त लघुकोनांची गुणोत्तरं विचारात घेतली तरच ती दोन्ही प्रकारांत सारखी येतील. आणि तशी ती यायला हवीतच ना? कारण, आपण कोनकल्पनेचा विस्तार करू पहात आहोत की नाही? cos 0 झालं. cos 90 सांगा.

स्वा cos 90 = 0. कारण त्यावेळी P, Y-अक्षावर असेल. म्हणून तर x = 0 y = r. मघाशी पाहिलंच की सर.

प्रा बरोबर. कळलं ना सगळ्यांना?

शे कळलं सर. हे स्पष्टीकरण मागच्यापेक्षा अधिक चांगलं आहे. पण, सर ऋण गुणोत्तराची उदाहरणं सांगता?

प्रा ती काय तुम्हीसुद्धा सांगू शकाल. कारण, आता त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं P च्या निर्देशकांवर अवलंबून असतात. आणि कोणत्या चरणात कोणते निर्देशक धन किंवा ऋण असतात, ते तुम्हाला माहीतच आहे. सांगा पाहू.

सु पहिल्या चरणात दोन्ही धन. दुसऱ्या चरणात x ऋण आणि y धन. तिसऱ्या चरणात दोन्ही ऋण आणि चौथ्या चरणात y ऋण पण x धन.

प्रा यानुसार sine आणि cosine गुणोत्तरांची चिन्हं ठरतील. आणि आता दुसऱ्या चरणात y धन असल्यामुळं sine गुणोत्तर धन आलं. त्यामुळं तर आपलं सूत्र सिद्ध झालं.

श्या मी श्याम. कोणतं सर?

शि अरे असं काय करतोस? sin (180-A) = sin A हे नाही का आपण दाखवतो आहोत?

श्या होय सर. कळलं.

शि आणखी काय सर?

प्रा आणखी खूपच आहे. एकच सांगतो. स्वातीनं म्हटलं होतं ना संगती एकास एक नाही? तेवढा मुद्दा पाहू. ज्या दोन कोनांतला फरक 360 किंवा 360 च्या, धन वा ऋण कोणत्याही पूर्ण पटीत असेल त्यांच्यात फरक करायचा नाही, असं ठरवलं की कोणत्याही कोनाची म्हणजे ऋण कोनांचीसुद्धा गुणोत्तरं मिळतील की नाही? कारण, अशा कोनांकरता OP त्याच एका जागी राहील. हे

पाहिलं तर -390, -30, 330, 690, इ. ह्यांच्यात फरकच नाही. घड्याळात, 13 आणि 1, 14 आणि 2, यांच्यांत आपण कुठं आपण फरक करतो? म्हणजे हे कळलं की ऋण कोनांचीसुद्धा गुणोत्तरं मिळतील की नाही? खरं तर वाटेल त्या कोनांची गुणोत्तरं मिळतील. जसे घड्याळात ऋण वाजत नाहीत तसे व्यवहारातही ऋण कोन येत नाहीत. गणितात किंवा विज्ञानात येऊ शकतात. पण, विस्तार म्हणजे काय कळलं ना?

मुलं कळलं सर, चांगलं कळलं. पण, आम्ही नेहमी अशा शंका विचारायला आलं तर चालेल का?

प्रा अवश्य. शंका विचारण्याचा तर तुमचा हक्कच आहे. आणि मला तर मुलांनी शंका विचारलेल्या आवडतातच.

शि सर समर्थ रामदासांच्या त्या ओव्या सांगता?

प्रा संबंधित तेवढ्या सांगतो. शिष्याच्या मनात एक शंका येते. ती विचारण्याकरता तो भीत भीत गुरुजींची आज्ञा मागतो. तेव्हा ते म्हणतात -

अरे शिष्या आशंका उद्भवली। ती अगत्य पाहिजे पुशिली।
हे आम्ही आज्ञा दिधली। पहिलेच तुज।।
जरी माझी मर्यादा धरिसी। तरी स्वहितासी अंतरलासी।
ह्या कारणे मानसी शंका धरू नको।।
आधीच काहीसी मर्यादा। संदिसे बसलो संवादा।
निरसिले नाही तुझिया भेदा। तोचि मी स्वामी कैचा।।

आणि शेवटी सांगतात,

ऐक आमुची आज्ञा ऐसी। मर्यादा टाकावी आम्हासी।
काय आठवले तुझिया मानसी। ते आशंका घेई आता।।

शंका विचारण्यामुळं तुमची नकळत प्रगती होत राहते, हे विसरू नका. आणि विचारीत जा. आणि सर, तुम्हीसुद्धा ह्यांना घेऊन येत जा कधीही.

ooooo

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

पुस्तिका

1.	मिश्र संख्या	– प्रा. म. रा. राईलकर	15.00
2.	विभागणी व तिची भावंडे	– डॉ. व. ग. टिकेकर	15.00
3.	गणिती युक्तिवाद	– प्रा. य. ना. वालावलकर	15.00
4.	गणित मौज	– श्री. ना. शं. मोने	15.00
5.	कोनाचं त्रिभाजन	– प्रा. म. रा. राईलकर	15.00
6.	संख्यानगरीत भटकंती	– श्री. पी. के. श्रीनिवासन् अनुवाद : डॉ. मधुकर देशपांडे	20.00
7.	गणितातील कयास, खरे व चुकलेले	– डॉ. व. ग. टिकेकर	20.00
8.	क्षेत्रफळ आणि घनफळ, काही तात्त्विक पैलू	– डॉ. रवींद्र बापट	20.00
9.	ऋण संख्या	– प्रा. म. रा. राईलकर श्री. ना. शं. मोने	20.00
10.	भूमितीय रचना	– श्री. ना. शं. मोने	20.00
11.	सममिती आणि इतर	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
12.	दिनदर्शिकेमधली जादू	– श्री. पी. के. श्रीनिवासन अनुवाद : डॉ. मधुकर देशपांडे	20.00
13.	एकाच माळेचे मणी	– श्री. ना. शं. मोने	20.00
14.	दोन मुलाखती	– संकलन : श्री. ना. शं. मोने	20.00
15.	गणितींचे किस्से	– डॉ. व. ग. टिकेकर	20.00
16.	निर्देशक भूमिती	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
17.	त्रिकोण नगरीसह भूमितीची विविधता	– प्रा. डॉ. सदाशिव देव	50.00
18.	संख्यामालिका	– श्री. दिलीप गोटखिंडीकर	40.00
19.	विधान एक: सिद्धता अनेक भाग (1)	– डॉ. व. ग. टिकेकर	50.00
20.	विधान एक: सिद्धता अनेक भाग (2)	– डॉ. व. ग. टिकेकर	50.00
21.	कापा आणि जोडा	– प्रा. म. रा. राईलकर	30.00
22.	अपूर्णांक	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
23.	दशांश अपूर्णांक	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
24.	समीकरण	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
25.	पायथागोरसची त्रिकुटे	– प्रा. डॉ. सदाशिव देव	50.00
26.	गणित फुले	– डॉ. व. ग. टिकेकर	50.00
27.	अपूर्णांक: आजीकडून शिका (सी.डी.)	– प्रा. म. रा. राईलकर	40.00
28.	कापा आणि जोडा (सी.डी.)	– प्रा. म. रा. राईलकर	50.00